2020年　東大数学　文系第4問　理系第4問 ①

(1)

復

$72 = 2^3 \times 3^2$ の自然数の約数の総和は、
$(1+2^1+2^2+2^3)(1+3^1+3^2)$ で求められるが、

式で表現すると、

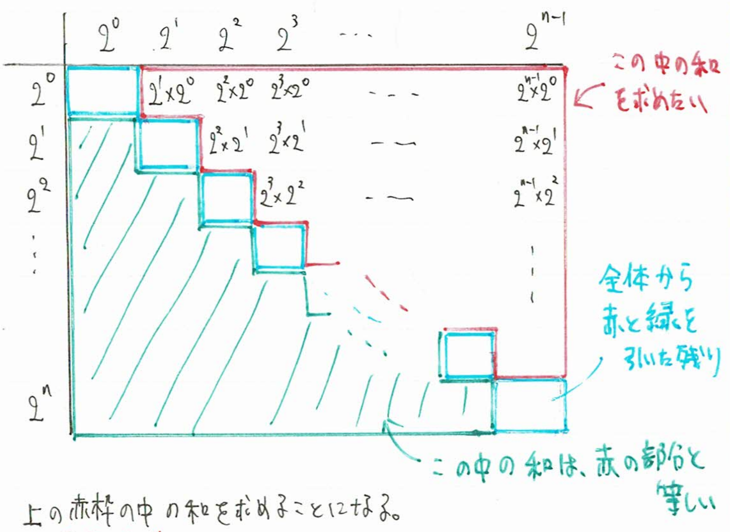
$1\times1+1\times3^1+1\times3^2+2^1\times1+2^1\times3^1+2^1\times3^2$
$+2^2\times1+2^2\times3^1+2^2\times3^2+2^3\times1+2^3\times3^1+2^3\times3^2$

表で表現すると、

	1	2^1	2^2	2^3
1	1×1	$2^1\times1$	$2^2\times1$	$2^3\times1$
3^1	1×3^1	$2^1\times3^1$	$2^2\times3^1$	$2^3\times3^1$
3^2	1×3^2	$2^1\times3^2$	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$

このようにかけ算の表を作って枠の中を足せばよい。

$a_{n,2} = 2^0\times2^0+2^0\times2^1+\cdots+2^0\times2^{n-1}+2^1\times2^2+2^1\times2^3+\cdots+2^1\times2^{n-1}$
$+\cdots$ 　であるが表で表すと、



上の赤枠の中の和をもとめることになる。

緑枠の中は、対称性から、赤枠の中の値と等しい。

残りの青枠の中は、$2^0\times2^0+2^1\times2^1+2^2\times2^2+\cdots+2^{n-1}\times2^{n-1}$
$= 4^0+4^1+4^2+\cdots4^{n-1}$
$= 1\times\frac{4^n-1}{4-1} = \frac{1}{3}(4^n-1)$

枠の中全体の和は
$(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2$ なので、

求める数 $a_{n,2}$ は、

$$a_{n,2} = \left\{\underbrace{(2^0+2^1+\cdots2^{n-1})^2}_{全} - \frac{1}{3}(4^n-1)\right\}\div2$$

予備校のネットの答案はいきなり、ここからスタートしてた!

$$= \left\{(2^n-1)^2 - \frac{1}{3}(4^n-1)\right\}\div2$$

$= \cdots$

$$= \frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)$$

(2) 何をしたら良いかわからないので、とりあえず具体的な値を代入

$f_1(x) = 1+a_{1,1}x$
$= 1+x$
∵ $a_{11} = 2^0\times2^0 = 1$

$f_2(x) = 1+a_{2,1}x+a_{2,2}x^2$
$= 1+3x+2x^2$
$= (1+x)(1+2x)$

$a_{2,1} = 2^0+2^1 = 3$
$a_{2,2} = \frac{1}{3}(2^2-1)(2^2-2) = 2$ ((1)より)

$f_3(x) = 1+a_{3,1}x+a_{3,2}x^2+a_{3,3}x^3$
$= 1+7x+14x^2+8x^3$
$= (1+x)(1+2x)(1+4x)$

$a_{3,1} = 2^0+2^1+2^2 = 7$
$a_{3,2} = \frac{1}{3}(2^3-1)(2^3-2) = 14$
$a_{3,3} = 2^0\times2^1\times2^2 = 8$

以上より、$f_n(x) = (1+x)(1+2^1x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)$
ではないかと推測できる。

※普通なら、ここで帰納法で証明という流れになるが、
$f_n(x) = 1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,n}x^n$ と
$f_{n+1}(x) = 1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,n}x^n+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$
を見比べて、$a_{n,k}$ と $a_{n+1,l}$ に関係式が見出しづらいので、断念。

2020年　東大数学　文系第4問　理系第4問②

ここで $(1+x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)$ において
展開したときの

x^1 の係数は $1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=a_{n,1}$

x^2 の係数は $1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^1\times1+2^1\times2^1+\cdots+2^1\times2^{n-1}$
$+\cdots+2^{n-1}\times2^{n-1}=a_{n,2}$

である。

一般化すると、確かに、上の式を展開した時の
x^k の係数は 2^m $(m=0,1,2\cdots n-1)$ から異なる
k 個を選んで、それらの積をとり、すべての選び方に対し
${}_nC_k$ 個の整数の和 $a_{n,k}$ になっている。

以上より $f_n(x)=1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,n}x^n$
$=(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)$
である。

よって $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\dfrac{(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)}{(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)}=1+2^nx$ ①

$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=\dfrac{(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^nx)}{(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^nx)}=1+x$ ②

(3) $a_{n+1,k+1}$ は $f_{n+1}(x)$ の展開式における
x^{k+1} の係数である。
(2) で $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx$ ①　$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$ ②
と結論が出たので、これを利用して求める

① ⇔ $f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)$
② ⇔ $f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)$ の2式の展開式の
x^{k+1} の係数を比較する。$=a_{n+1,k+1}$

① ⇔ $(1+2^nx)(1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,k}x^k+a_{n,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,n}x^n)$

の x^{k+1} の係数は $a_{n,k+1}+2^n\times a_{n,k}$

② ⇔ $(1+x)(1+a_{n,1}(2x)+\cdots+a_{n,k}(2x)^k+a_{n,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots a_{n,n}(2x)^n)$
の x^{k+1} の係数は $2^{k+1}a_{n,k+1}+2^k\cdot a_{n,k}$

よって $\begin{cases} a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^n\times a_{n,k} \\ a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^k\times a_{n,k} \end{cases}$

この2式から $a_{n,k+1}$ を消去すると
$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\dfrac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$

$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を求めるので $a_{n,k+1}$ は邪魔。